UN PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN RESUELTO CON DIFERENTES HERRAMIENTAS

Susana Beatriz Ruiz, María Inés Ciancio, Elisa Silvia Oliva
Depto de Geofísica y Astronomía – Depto de Geología – Facultad de Ciencias Exactas F. y Naturales de la Univ. Nacional de San Juan – San Juan. Argentina
sbruizr@yahoo.com.ar, miciancio@hotmail.com, elisaoliva65@gmail.com
Nivel Universitario

Palabras clave: Cálculo. Extremos. Mínimos Cuadrados. Aplicación.

Resumen

El desarrollo científico-tecnológico de los últimos años ha permitido la utilización de nuevas herramientas y métodos matemáticos que se pueden aplicar en modelos de investigación en diferentes esferas del conocimiento.

La presente comunicación muestra los resultados de una experiencia áulica desarrollada con alumnos de las carreras de Lic. En Geofísica y Lic. En Ciencias Geológicas en la asignatura Análisis Matemático II; en la Facultad de Ciencias Exactas F. y Naturales de la Universidad Nacional de San Juan.

El tema desarrollado es: aplicación de conceptos para determinación extremos en una función de dos variables, empleando diferentes métodos del cálculo que proporcionan herramientas poderosas para resolver un problema planteado, basado en un ajuste lineal, el cual está relacionado con información de minerales y su formación.

Se trabajan datos de muestras de "granate" (piedra fina de color rojo), con información de fracción molecular de Ca (calcio), y coeficiente de distribución de Fe-Mg (hierro-magnesio).

Para obtener la recta de aproximación al conjunto de datos (cantidad de calcio, distribución Fe-Mg) por mínimos cuadrados, se relacionan conceptos de: campo escalar diferenciable, curvas de nivel, vector gradiente, extremos libres para funciones de dos variables, solución de sistemas de ecuaciones normales. Se utiliza la visualización gráfica (obtenida con el apoyo de software) para la interpretación de respuestas obtenidas.

Las herramientas que se proponen en este proyecto áulico exploratorio, invitan al estudiante a descubrir aspectos matemáticos y numéricos que lo conducen y entrenan en el arte de conjeturar y experimentar, a fin de promoverlo en futuros proyectos de investigación.

Introducción

Esta experiencia áulica se propone para alumnos del segundo de las carreras de Lic. En Geofísica y Lic. en Geología, de la Fac. de Ciencias E. Físicas y Naturales de la UNSJ, en las cátedras de Análisis Matemático II y Matemática II. En términos generales; los contenidos conceptuales que se desarrollan involucran el estudio de extremos para funciones de dos variables, y la utilización de diferentes métodos algebraicos y analíticos que permitan obtener la solución del modelo planteado.

Situación Problemática Propuesta: El modelo planteado, está relacionado con el ajuste de datos de muestras de granate los que contienen información de la fracción molecular de Ca y del coeficiente de distribución de Fe-Mg.La cantidad de calcio (Ca) en el granate afecta el coeficiente de distribución Fe-Mg, el cual es altamente dependiente de la temperatura a la que se formó el granate. Este problema es, objeto de estudio de los geofísicos y de los geólogos, los que buscan reunir información de los minerales y su proceso de formación.

Herramientas Propuestas: Para obtener la recta de aproximación al conjunto de datos proporcionados desde el modelo (cantidad de calcio, distribución Fe-Mg) por mínimos cuadrados, se trabaja con los alumnos para que relacionen y apliquen los conceptos desarrollados en la asignatura: campo escalar diferenciable, curvas de nivel, vector gradiente, extremos para funciones de dos variables, solución de sistemas de ecuaciones normales, y utilización de herramientas computacionales a fin de optimizar los tiempos para obtener respuestas del problema sugerido. La interpretación y discusión de las respuestas obtenidas, apoyados con el uso del software (en este curso se utilizó una versión libre de Maple, disponible en la red); permiten afianzar y lograr una de las metas propuestas desde las cátedras con este tipo de experiencias: "Presentar una clase de Análisis Matemático II y de Matemática II en la que se estimulen los procesos intelectuales creativos a través de la implementación de diferentes métodos y estratégicas que brinda el cálculo matemático."

Material didáctico utilizado: Del material preparado para desarrollar esta experiencia se puede mencionar el diseño de la Guía de Actividades Para el Alumno, en la cual figuran:
a) el enunciado de la situación problemática a resolver relacionada con el campo de la Geología y Geofísica Minera (formación de rocas metamórficas) (Tarbuck E., 2001) (Grossman S., 1996), b) las actividades que deben resolverse, (estas actividades involucran diferentes herramientas que se proponen al alumno, y el empleo de diversas estrategias que le ayudan a pensar, crear y reflexionar en torno a los diferentes abordajes que podría realizar con el bagaje de conocimientos que poseen para dar respuesta a un mismo planteo propuesto); c)respuestas obtenidas y discusión de las mismas.

Presentación del modelo de la guía de trabajo

Situación Problemática Propuesta (Geología-Geofísica Minera): Dada la importancia que tiene para la sociedad el estudio y manejo de los diferentes minerales que se pueden analizar en nuestro espacio geográfico, es sabido que tanto los profesionales dedicados a la Geología y a la Geofísica, se interesan por estudiar la composición de rocas y minerales en las formaciones montañosas para reunir información sobre ellas. Estudiando las rocas metamórficas (transformación natural que se opera en un mineral o roca) y determinando aspectos físicos como temperatura y presión a la que se formaron se obtendrá información útil sobre las condiciones presentes en el momento de formación. Un mineral común es el "granate" (se sugiere investigar sobre las características del mismo).

Se sabe que el coeficiente de distribución de Fe-Mg del granate es altamente dependiente de la temperatura a la que éste se formó. Pero también se tiene que dicho coeficiente está en relación con la cantidad presente de calcio (Ca) en el granate. Se pueden hacer correcciones a las estimaciones de temperatura si la relación entre la cantidad de calcio presente y el coeficiente Fe-Mg del granate se pueden determinar (Grossman S., 1996).

Se reunieron los siguientes datos de muestras de granate tomadas en montañas de una cierta región de estudio. Tenga en cuenta que los errores en las mediciones de la fracción molecular de Ca se asumen despreciables.

i	X=Fracción molecular de Ca	Y=Coeficiente de distribución Fe-Mg
1	0.01	**0.1691567**
2	0.02	**0.1672836**
3	0.03	**0.1592042**
4	0.04	**0.1551443**
5	0.05	**0.1550818**
6	0.06	**0.1470683**
7	0.07	**0.1447617**
8	0.08	**0.1392860**
9	0.09	**0.1381678**
10	0.01	**0.1343818**

Tabla 1

A continuación se propone que desarrolle las siguientes actividades.
Sugerencia: Tenga en cuenta los conceptos trabajados desde la cátedra y que estén relacionados con el problema planteado, utilice todas las herramientas que Usted considere adecuadas para darle solución.

Actividad 1:
1.1: Considerando "la fracción molecular de Ca" como la variable "x", y "el coeficiente de distribución Fe-Mg" como la variable "y", represente gráficamente los puntos (x,y) observados.

1.2: De la observación del gráfico de la actividad 1.1 puede responder si ¿el grafico obtenido sugiere el planteo, como modelo, una relación lineal aproximada entre las variables x e y?

Definición Alternativa:
Asumiendo como modelo adecuado: y=mx+b+E, donde E es el término de error.
Dados los valores observados (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_{10},y_{10}) , se desea determinar un procedimiento para elegir la recta y=b+m x, tal que haga "mínima" la suma de los residuos al cuadrado. Este problema en forma general se puede plantear como sigue:
Problema: *"Dados los valores observados (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n), se quiere encontrar los números reales "b" y "m" tales que*

$$f(m,b) = [y_1 - (b + m\,x_1)]^2 + [y_2 - (b + m\,x_2)]^2 + \ldots + [y_n - (b + m\,x_n)]^2$$ *sea mínima."*

Una vez encontrados los valores "b" y "m", la recta y=mx+b se llama *"recta de aproximación por mínimos cuadrados a los datos (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n)"(Grossman,1996).*

Actividad 2: "Aproximación a la solución del Problema utilizando herramientas graficas"

2.1:. De acuerdo a la definición alternativa, obtenga la expresión analítica de la forma f(m,b) para los valores proporcionados en la Tabla 1. Clasifíquela de acuerdo al dominio y a su imagen.

Represente gráficamente f(m,b), considerando distintos valores de "m" y "b". (Sugerencia: Puede comenzar trabajando para valores b y m tales que: $-0.5 \leq b \leq 0.5$ y $-10 \leq m \leq 10$.)

¿El campo escalar f(m,b) es diferenciable? Justifique su respuesta usando la definición o algún teorema.

2.2: Represente gráficamente los vectores gradientes asociados al campo escalar f(m,b) para valores de b y m considerados en el paso anterior. ¿Qué observa a partir del grafico obtenido con relación al comportamiento del vector gradiente?

2.3: En un mismo sistema de ejes cartesiano realice la representación solicitada en el apartado 2.2 y además el de curvas de nivel de f(m,b) para distintas alturas .¿qué valores sugeriría como valores aproximados de "m" y "b" que minimizan a f(m,b)?

2.4: En un mismo sistema de ejes cartesiano represente gráficamente los pares (x,y) dados en la Tabla 1 y la recta y= mx+b que se obtiene con los valores dados de m y b propuestos en el apartado anterior. Extraiga conclusiones.

Actividad 3: "Solución analítica del Problema, mediante el análisis de la diferenciabilidad del campo escalar f(m,b)"

3.1: Determine analíticamente el o los valores críticos donde pueden presentar extremos el campo escalar f(m,b).

3.2: Clasifique el o los valores críticos utilizando el criterio de la Matriz Hessiana.

3.3: En un mismo sistema de ejes cartesiano represente gráficamente los pares (x,y) de valores observados (Tabla 1), la recta por mínimos cuadrados y la que se obtiene según lo propuesto en el apartado 2.3. Compare los resultados, analice errores y saque conclusiones.

Actividad 4: "Solución analítica del Problema, mediante el empleo de un Método Matricial"

"Otra forma de resolver el problema es presentar al modelo en forma matricial. Si los puntos *(x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) están todos sobre la recta y=b+mx* (es decir, son colineales), entonces se tiene: $\begin{cases} y_1 = b + mx_1 \\ y_2 = b + mx_2 \\ \vdots \\ y_n = b + mx_n \end{cases}$. Luego y=A.u, donde $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \text{ y } u=\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}.$$

Pero si los puntos no son colineales, entonces $y \neq Au$, y el problema es encontrar la matriz u , tal que la distancia d(y,Au) sea mínima.

Método Matricial: Se puede mostrar (no lo hacemos en este curso) bajo las condiciones planteadas que: "Si $(A^T.A)^{-1}$ existe y $u^*=(A^T.A)^{-1}.A^T.y$ entonces $u^*=\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}$ hace mínimo d(y,Au)." (Grossman S., 1996).

4.1: A partir de los datos de la Tabla 1, determine la matriz A y luego calcule $A^T.A$.

4.2: Muestre que $A^T.A$ admite inversa y halle $(A^T.A)^{-1}$.

4.3: Obtenga los valores de "m" y "b" que minimizan d(y,Au) por el Método Matricial.

4.4: Plantee la relación lineal por mínimos cuadrados, entre la Fracción molecular de Ca presente y el coeficiente Fe-Mg del granate según la muestra proporcionada en la Tabla 1. Compare las soluciones obtenidas por los distintos métodos abordados e interprete el valor de "m" obtenido en la recta de mínimos cuadrados.

Actividad 5. Espacio para expresar sus vivencias respecto a las actividades desarrolladas. Indique aspectos positivos y negativos de esta experiencia.

Muestra de algunas actividades desarrolladas por los alumnos

Para las diferentes actividades planteadas los alumnos solicitan el apoyo de los docentes de Cátedra, para realizar las diferentes representaciones gráficas solicitadas

- ❖ *Utilizaron comandos y librería del software, para graficar puntos en el plano. Gráfica* solicitada (ver Figura 1)

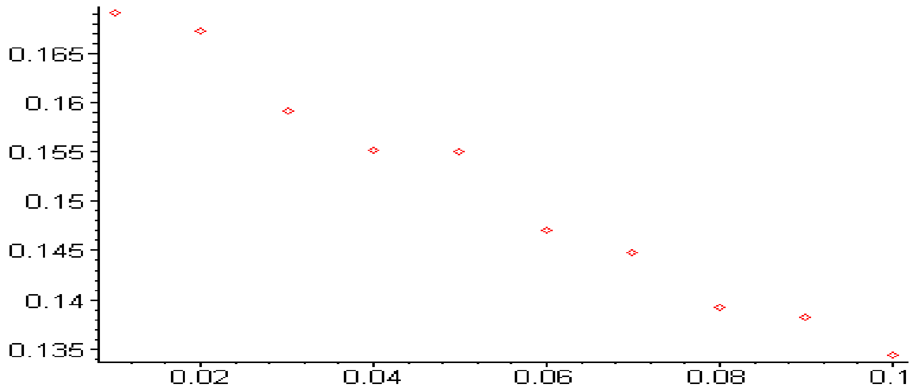


Figura 1

Desde el análisis del gráfico sugieren el planteo de relación lineal aproximada entre las variables x e y.

Para la Actividad 2, apartado 2.1, los alumnos construyen con lápiz y papel la expresión analítica de f(m,b) y luego discuten grupalmente la diferenciabilidad del campo escalar f(m,b), concluyendo que el campo escalar es diferenciable en todo su dominio de definición por ser una función polinómica.(Thomas- Finney, 1999; Larson y Hostetler, 1989).

- *Utilización de nuevos comandos del software, para definir la expresión analítica de campos escalares y realizar los gráficos correspondientes en el espacio.*

+ (suma de escalares- (resta de escalares)

A partir de las representaciones obtenidas por los alumnos (ver Figura 2- Figura 3- Figura 4) pueden identificar gráficamente regiones del dominio del campo escalar donde crece o decrece f(m,b).

```
>f:=(0.1691567-(b+m*0.01))^2+(0.1672836-(b+m*0.02))^2+(0.1592042-
(b+m*0.03))^2+(0.1551443-(b+m*0.04))^2+(0.1550818-(b+m*0.05))^2+(0.1470683-
(b+m*0.06))^2+(0.1470683-(b+m*0.06))^2+(0.1447617-(b+m*0.07))^2+(0.1392860-
(b+m*0.08))^2+(0.1381678-(b+m*0.09))^2+(0.1343818-(b+m*0.1))^2:
```

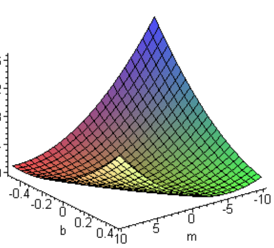


Figura 2

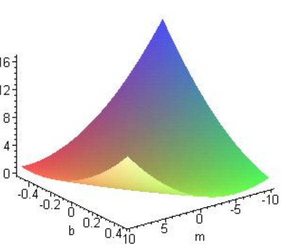


Figura 3

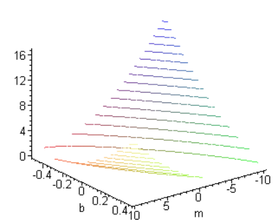


Figura 4

Para resolver los apartados 2.2, 2.3 y 2.4, los alumnos recuerdan los conceptos de curvas de nivel, gradiente y las condiciones de extremos de campos escalares diferenciables, previamente vistos en el curso de Análisis Matemático II, para luego aplicarlas.

❖ *Utilización de nuevos comandos del software, para realizar los gráficos solicitados.*

Los alumnos obtienen las representaciones gráficas de los vectores gradientes de f(m,b) para distintos puntos del dominio del campo escalar (Figura 5), las curvas de nivel en el plano (m,b) (Figura 6) y las graficas superpuestas (Figura 7: a), b) y c)).

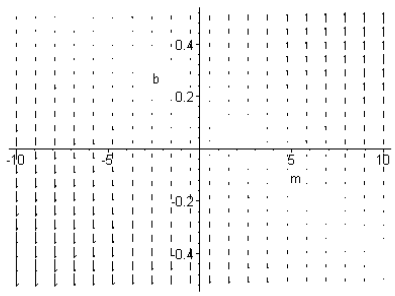


Figura 5

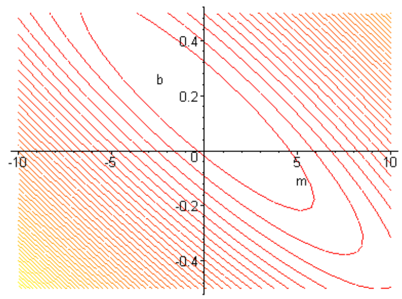


Figura 6

a) b) c)

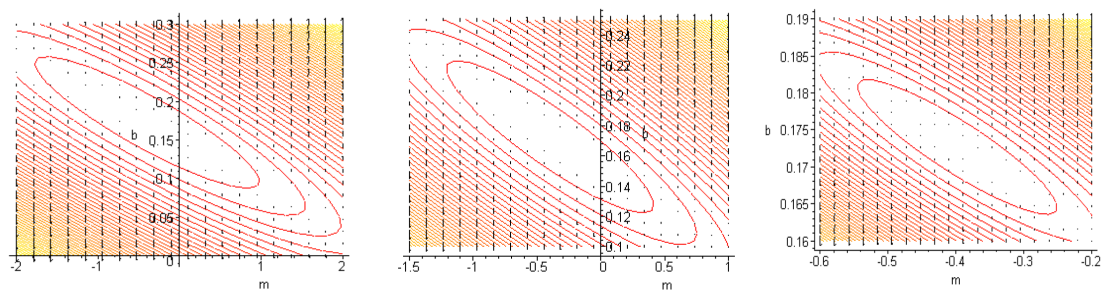


Figura 7

Mediante el análisis de gráficos, discusión grupal y vinculación con conceptos y propiedades previamente trabajados en la cátedra, los alumnos concluyen y sugieren los valores b=0.175 y m= -0.4 como valores próximos a los valores que minimizan a f(m,b)

También obtienen la grafica de la recta y=mx+b, para los valores proporcionados por ellos y observan que dicha recta muestra aproximadamente la misma tendencia lineal decreciente que señala los puntos dados (Figura 8) .

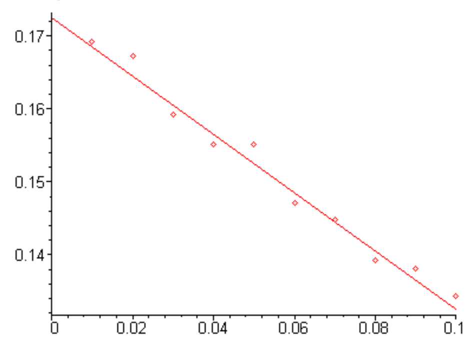


Figura 8

Para la Actividad 3, los alumnos efectúan a mano los cálculos correspondientes a la determinación de extremos de funciones diferenciables de campos escalares. Experimentan la dificultad de ser una tarea muy lenta influenciada por el número de observaciones que proporciona la tabla. Para esta etapa de trabajo se sugiere

- *Usar nuevos comandos del software, para facilitarles el calculo de las derivadas parciales, resolver un sistema de ecuaciones lineales, generar matrices y calcular determinantes:*

Finalmente los alumnos obtienen como valores que minimizan a f(b,m) a:

$$\{m = -.3983384725, b = .1726900880\}$$

Utilizan opciones de gráficos para diferenciar el grafico de la recta por mínimos cuadrados de la obtenida en la Actividad 2 (Figura 9).

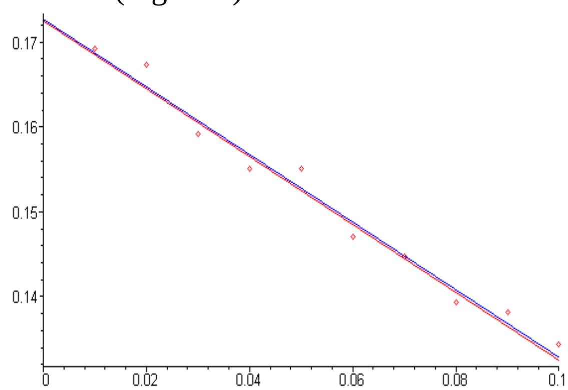


Figura 9

Mediante el trabajo en grupos comparan los valores de "y" observados con los estimados a través de las rectas, y corroboran las ventajas del método analítico sobre el grafico en el proceso para la determinación de los valores "m" y "b.

Para la Actividad 4, los alumnos con la ayuda del software definen la matriz A.

Los alumnos obtienen que el determinante de la matriz $A^T.A$ es $.0825$ (no nulo), por lo que teniendo en cuenta propiedades vistas del álgebra lineal, concluyen que dicha matriz admite inversa.

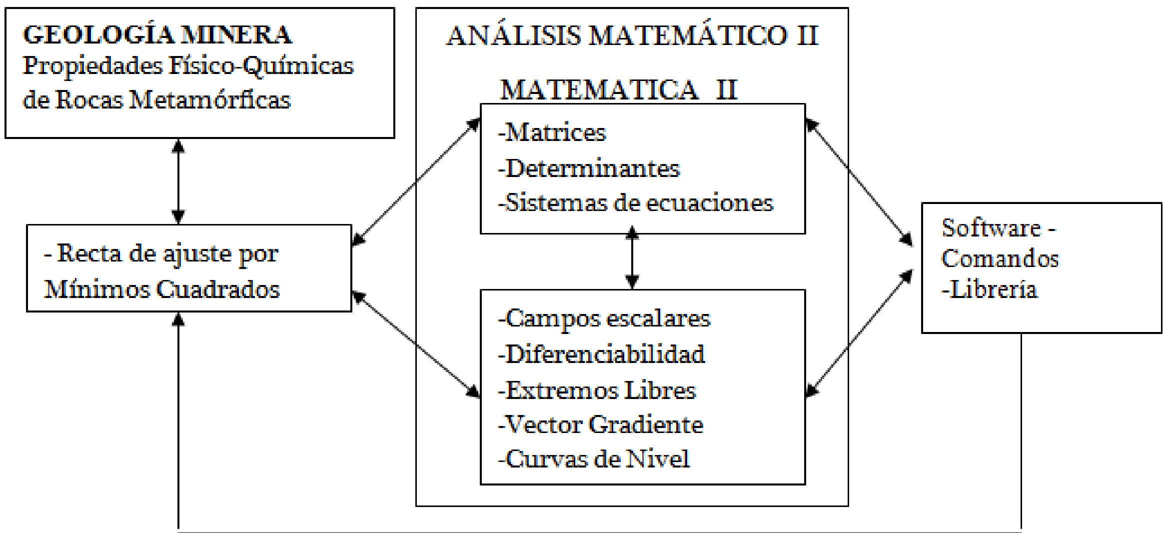
Luego de obtener la inversa de $A^T.A$, A^T y el definir la matriz Y, calculan $u^* = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = (A^T.A)^{-1}A.^T y$ utilizando el software, obtienen como resultado por el Método Matricial:

$$u := \begin{bmatrix} .1728048533 \\ -.3972951528 \end{bmatrix}$$

Los alumnos corroboran que las soluciones son las mismas que las obtenidas por el método para determinar extremos de funciones diferenciables. La recta de aproximación por mínimos cuadrados al conjunto de datos que se obtiene es : y=- 0.3972951528 x+0.1728048533, considerando "la fracción molecular de Ca" para x, y "el coeficiente de distribución Fe-Mg" para y.

Esquema de las secuencias seguidas en las actividades

Al proponer este tipo de experiencia, a los alumnos se les ofrece la posibilidad de establecer relaciones e integrar los conceptos de Análisis Matemático II, Matemática II, Algebra Lineal, recta de aproximación a un conjunto de puntos por mínimos cuadrados y propiedades físico-químicas de rocas metamórficas (Geología Minera) , con el objetivo de lograr aprendizajes significativos en las Cátedras de Análisis Matemático II, Matemática II, a partir de tareas que se desarrollan en el Gabinete de Computación con el apoyo del software.



Conclusiones generales

Desde esta propuesta de trabajo, se pudo observar que este tipo de actividades integradas y con aplicaciones a problemas de la vida real, involucran conductas en las cuales tienen cabida la creatividad y en las que la interacción favorece la comunicación.

La creatividad es una forma de pensar, recurriendo a estrategias de pensamiento abierto, flexible y transferible. Además produce satisfacción en el alumno, poder lograr interpretaciones de respuestas que consideraban meros resultados matemáticos.

Es una experiencia con resultados satisfactorios y gratificantes tanto para el docente como para el alumno.

Referencias Bibliográficas

Grossman Stanley I. (1996). *Algebra Lineal.* México: McGraw-Hill.

Larson, R. y Hostetler, R. (1989). *Cálculo y Geometría Analítica*. Madrid: McGraw-Hill.

Tarbuck, E. (2001). *Ciencias de la Tierra. Una introducción a la Geología Física*. España: Pearson. Educación.

Thomas – Finney. (1999). *Cálculo Varias Variables*. México: Pearson Educación.